

1 Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice. Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

Definice. Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

Definice. Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice. Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku) B .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výroková forma V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

Definice. Necht' V je výroková forma s jednou proměnnou.

(a) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x: V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x: V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

———— Konec 1. přednášky, 1. 10. 2025 ————

- důkaz rozбором případů
- důkaz matematickou indukcí

1.3 Množiny

G.Cantor: „**Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.“

Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a V je výroková forma.

Definice. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

Definice. Kartézským součinem množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla). *Necht' X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice. Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Často v tomto případě používáme zápis $a R b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subset A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B** . Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A** .

Definice. Necht' X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice. Necht' R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Definice. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A , jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A , jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

Definice. Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

———— Konec 2. přednášky, 2. 10. 2025 ————